# Integration von Schülerinnen und Schülern mit einer Sehschädigung an Regelschulen

## Didaktikpool

Zahlbegriffsentwicklung blinder und sehender Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf Lernmaterialien im Gemeinsamen Unterricht

- 1 Zur Begrifflichkeit der Zahl -

Melanie Linscheidt

2002

**Universität Dortmund**
**Fakultät Rehabilitationswissenschaften**
**Rehabilitation und Pädagogik bei Blindheit und Sehbehinderung**
**Projekt ISaR**
**44221 Dortmund**

**Tel.: 0231 / 755 5874**
**Fax: 0231 / 755 4558**

**E-mail:** isar@uni-dortmund.de
**Internet:** http://isar.reha.uni-dortmund.de

# 1 Zur Begrifflichkeit der Zahl

Der komplexe Begriff der Zahl kann auf unterschiedliche Weise strukturiert werden. Fricke (1970, 32) unterscheidet beispielsweise zwischen der philosophisch-ontologischen Sichtweise, der psychologisch-genetischen Herangehensweise und dem logisch-mathematischen Standpunkt. Maier (1972, 34f) differenziert zwischen dem pragmatischen Begriff der Anzahl, dem psychologischen Zahlbegriff und der philosophisch-mathematischen Zahl. Im vorliegenden Kapitel wird zunächst die mathematische Sichtweise, also die Zahl betrachtet. Kapitel 1.2 beschäftigt sich mit der Herkunft der Zahl, um sich dem Begriff von einer anderen interessanten Weise zu nähern. Der Zahlbegriff, von dem im psychologischen Zusammenhang gesprochen wird, findet in Kapitel 1.3 Berücksichtigung. Abschließend wird in Kapitel 1.4 auf der Grundlage der gewonnenen Erkenntnisse eine eigene Arbeitsdefinition des Zahlbegriffs entwickelt, um eine gemeinsame Diskussionsgrundlage in Bezug auf die vorliegende Arbeit zu schaffen.

Eine vollständige Darstellung des Begriffs Zahl kann hier nicht das Ziel sein. Es wird versucht, einen Einblick in die Komplexität der Zahl bzw. des Zahlbegriffs zu geben, um diesen Aspekt für die Arbeit nutzbar zu machen.

## 1.1 Zur Definition des Begriffs „Zahl" in der Mathematik

In der Mathematik wird der Zahlenraum in verschiedene aufeinander aufbauende Zahlbereiche unterteilt, nämlich in die Menge der natürlichen Zahlen, der ganzen Zahlen, der Bruchzahlen etc. bis hin zu den komplexen Zahlen. Innerhalb dieser Zahlbereiche können wiederum Zahlenarten unterschieden werden, wozu beispielsweise gerade und ungerade Zahlen, Primzahlen, Quadratzahlen etc. gehören (vgl. Meyers Lexikonredaktion 1990, 501ff). Was aber ist eine Zahl? Um diese Frage zu klären, wurde oft versucht, diesen komplexen Begriff auf seinen Ursprung, d.h. auf seine einfachsten Grundlagen zu reduzieren (Reduktionismus). Diese Grundlagen aller Zahlen sind die natürlichen Zahlen (vgl. Wember 1998, 36). Aber selbst dann, wenn nur die natürlichen Zahlen betrachtet werden, gibt es noch eine Vielzahl sehr unterschiedlicher Begründungen von Zahlen. Eine davon ist die vielfach diskutierte Mengentheorie, als deren Begründer G. Cantor (1845-1918) gilt. Demnach ist eine Menge M „jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen“ (Meyers Lexikonredaktion 1990, 296). Mit anderen Worten können also Mengen sehr unterschiedliche Elemente enthalten, z.B. acht Birnen, acht Bananen und acht Äpfel. Obwohl diese Mengen offensichtlich sehr unterschiedlich sind, haben sie doch eine gemeinsame Eigenschaft: die Zahl (in diesem Fall die Zahl Acht). Bei dieser Darstellung geht es also um die Anzahl an Elementen, den Kardinalzahlaspekt.

Eine alternative Begründung der Zahl sieht die Funktion bzw. die Zählzahl als deren Grundlage. Demnach steht die Reihenfolge der Zahlen im Vordergrund (Ordinalzahlaspekt), methodisch gesehen also das Zählen (vgl. Wember 1998, 36f). Es wird davon ausgegangen, dass jede Zahl einen Nachfolger hat und die Zahlen sich bis zur Unendlichkeit weiter verfolgen lassen. Um diesen Zusammenhang noch exakter zu definieren, entwickelte Guiseppe Peano im 19. Jahrhundert ein Axiomensystem bezüglich der natürlichen Zahlen, d.h. einige Grundsätze, die als gegeben angenommen werden dürfen und nicht mehr weiter begründet werden müssen. Die Peano-Axiome beschreiben die Zahl und auf ihnen bauen alle anderen Zahlbereiche auf (vgl. Meyers Lexikonredaktion 1991, 40). Diese Regeln sollen anstelle der komplizierten, jedoch exakten mathematischen Sprache, wie Müller und Wittmann (1984, 175) sie aufführen, in Schriftsprache dargestellt werden, um die hier wichtigen Zusammenhänge leichter verständlich zu machen:

- P.1. 1 ist eine natürliche Zahl.
- P.2. Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, bei dem es sich ebenfalls um eine natürliche Zahl handelt; demnach ist die Folge der natürlichen Zahlen unendlich.
- P.3. Die einzige Zahl, die kein Nachfolger ist, ist die 1, da diese den Anfang der Zahlreihe darstellt.

- P.4. Jede natürliche Zahl, mit Ausnahme der 1, hat genau einen Vorgänger.
- P.5. Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Menge, welche die Zahl 1 und die Nachfolger aller Zahlen aus dieser Menge enthält.

## 1.2 Zur Herkunft der Zahl

Die Frage nach der Herkunft der Zahl beschäftigt die Menschen schon seit vielen Jahrtausenden (vgl. Moser Opitz 2001, 15). Dabei wurden hauptsächlich zwei kontroverse Standpunkte diskutiert: wurde die Zahl erfunden (Konstruktivismus) oder vom Menschen entdeckt (Idealismus)?

Schon in der Antike war Pythagoras (6. Jahrhundert v.Chr.) der Meinung, dass die Zahlen vom Menschen entdeckt und für den Alltag genutzt wurden. Dies ist mit der Tatsache vergleichbar, dass den Menschen nicht immer bewusst war, dass Planeten und das Sonnensystem schon seit jeher existieren. Für ihn waren Zahlen die wahre Realität und die Sprache des Universums (vgl. Brainerd 1979, 2ff). Auch Keppler begründete seinen ebenfalls idealistischen Standpunkt damit, dass die Ordnung der Weltharmonie durch Zahlen beschrieben werden könne und auch die Zahlen aufgrund der Tatsache, dass die Welt schon ewig existiere, schon immer vorhanden gewesen sein müssten (vgl. Wember 1998, 23f).

Immanuel Kant, Hermann Weyl und besonders Leopold Kronecker stellten im 18. und 19. Jahrhundert die Vermutung auf, dass die Grundlage der Zahlen, also die natürlichen Zahlen, gottgegeben sein könnten, also schon immer existierten, während alle anderen Zahlbegriffe vom Menschen erfunden wurden (vgl. Maier 1990, 6 und Wember 1998, 23).

Dies führt zum konstruktivistischen Standpunkt, der seit dem späten 19. Jahrhundert vorwiegend vertreten wird. Gottlob Grege und Richard Dedekind beispielsweise sind der Ansicht, dass die Zahl vom Menschen konstruiert, also erfunden wurde, um ihm gleichsam dem Rad, der Glühbirne oder dem Radio zu dienen (vgl. Brainerd 1979, 2f). Auch für Dedekind sind Zahlen „freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen“ (vgl. Dedekind 1965, III).

Die Diskussion bezüglich der Herkunft und Identität der Zahl dauert bis heute an. Interessant ist in diesem Zusammenhang die phylogenetische Entwicklung der Zahl, denn hier sind einige Argumente des Idealismus sowie des Konstruktivismus wiederzufinden.

In früheren Zeiten gab es die Zahl nicht als abstrakten Begriff wie heute. Statt dessen beschrieben die Menschen eine Menge als einen qualitativen Zustand. In einigen Bereichen geschieht das heute noch, wenn wir z.B. von einem Regenguss im Unterschied zu einem Nieselregen sprechen. Ohne genaue quantitative Angaben zu machen, nur durch die Beschreibung des qualitativen Zustandes, können wir Aussagen über die Menge des Regens machen. Ähnlich kann man sich das „Zahl“verständnis der Naturvölker vorstellen. Daraus entwickelten sich schließlich Symbole für Mengen, die sich an der Natur orientierten, beispielsweise könnte ein Kleeblatt für die Menge drei gestanden haben etc. (vgl. Csocsán u.a. 2002, 15). Diese wurden zunächst nur gedacht und evtl. sprachlich geäußert. Erst seit 3000 v.Chr. existieren archäologische Funde, die zeigen, dass Zahlzeichen erstmalig von den Babyloniern auf Tontafeln geschrieben bzw. eingebrannt wurden, wodurch sie heute noch erkennbar sind (Neubrand & Möller 1990, 32). Größere Mengen „zählte“ man mit Hilfe der Materialmethode, bei der z.B. ein Stein für einen zu zählenden Gegenstand beiseite gelegt wurde (Stück-für-Stück-Korrespondenz). Anhand der Menge der Steine konnte nun auf eine andere Menge, beispielsweise auf die der Schafe, geschlossen werden. Dabei ordneten die Menschen die Zeichen systematisch in Gruppen und Muster, was von einem gewissen Verständnis für die Zahl zeugt (vgl. Csocsán u.a. 2002, 16).

Doch beinhalten weder die genutzten Zeichen noch die Materialmethode abstrakte Zahlzeichen. Erst ab ca. 1800 v.Chr. schrieben die Babylonier Mengen einheitlich und abstrakt, oder vielmehr „halb-abstrakt“ auf. Das Zeichen für einen einzelnen Gegenstand war ein Strich (I), während zehn Gegenstände durch einen Winkelhaken (<) zusammengefasst wurden. Die Zahl 14 wurde also folgendermaßen dargestellt: „<IIII“. Bei höheren Zahlen stieß dieses Verfahren schnell an seine Grenzen, so dass die 60 als eine Art Basis eingeführt wurde und vorweg gestellte Einer-Zeichen als 60 fungierten. Die Zahl III<<<IIII war demnach 3 mal 60 plus 34, also 214 (vgl. Neubrand & Möller 1990, 33). Dieses auf 60 basierende System war jedoch nicht das einzige. Andere Kulturen verwendeten die 12, die 20 oder die 10 (wie wir heute) als Basiszahl, wobei viele verschiedene Systeme der Schreibweise entstanden sind, auf die an dieser Stelle aber nicht näher eingegangen wird.

Diese Erkenntnisse machen deutlich, dass die Menschheit Zahlen zunächst als eine positive Menge aufgefasst hat, welche heute als die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet wird. Die Darstellung von Mengen und später auch die Verständigung darüber im Alltag wurde benötigt, um beispielsweise Handel betreiben zu können. Im 9. Jahrhundert nach Christus reichten die vorhandenen Zeichen im Alltag nicht mehr aus; so wurde in Indien zum ersten mal ein Zeichen für die Null eingeführt. Es folgten die negativen Zahlen, beispielsweise in Form von Schuldscheinen, und dann die Stammbrüche, die generalisiert und später um alle anderen Bruchzahlen erweitert wurden (vgl. Wember 1998, 31).

Bis zur Einführung der Null in Europa im 12. Jahrhundert wurde auf unterschiedliche Weise gerechnet. Häufig wurde dazu ein System verwendet, das dem eines Abakus (Rechenmaschine) sehr nahe kam. Mit der Einführung der Null war nun der schriftliche Algorithmus möglich. Bis zum 16. Jahrhundert wurden beide Methoden, d.h. sowohl der Abakus als auch der schriftliche Algorithmus, parallel verwendet, bis sich der schriftliche Algorithmus schließlich durchsetzte. Der Buchdruck ermöglichte eine Vervielfältigung und rasche Verbreitung von Berechnungen, was der Abakus nicht vermochte. Dennoch wird dieser auch heute noch in vielen, vorwiegend asiatischen, Ländern verwendet und stellt ein gutes Rechenwerkzeug dar. Er macht unser auf 10 basierendes System besonders deutlich. Dieser Zusammenhang wird in Kapitel 3.4 im Zuge einer Beschreibung des Abakus noch näher erläutert (vgl. Csocsán u.a. 2002, 17f).

Wie in dieser Darstellung der evolutionären Entwicklung der Zahl deutlich wird, kann die Frage nach der Herkunft der Zahl nicht eindeutig beantwortet werden. Es ist denkbar, dass die Zahl an sich gottgegeben ist und dass die Menschheit sie nur Schritt für Schritt in beschriebener Weise entdeckt hat. Die Zahl Null, so mag begründet werden, existierte allein schon dadurch, dass ein Bauer beispielsweise „keine" Hühner, also null Hühner, besitzen konnte, und zwar bereits vor der sprachlichen und schriftlichen Verwendung der Zahl Null. Auch die Argumentation, dass es im Weltall Orte des „Nichts" gibt, unterstützt diese These. Ebenso verhält es sich mit negativen Zahlen (beispielsweise, wenn einer dem anderen etwas schuldet) sowie bei Bruchzahlen (wenn nur ein halbes Huhn gekauft wurde). Andererseits ist es ebenso denkbar, dass sich all diese Zahlen lediglich aus dem alltäglichen Handeln der Menschen ergeben haben, ohne dass sie vorher bereits existierten. Neuere Untersuchungsergebnisse befürworten jedoch zum großen Teil den konstruktivistischen Standpunkt bzw. die Kombination beider Theorien, also dass die natürlichen Zahlen gottgegeben sind und wir Menschen uns den Rest erdacht haben (vgl. Wember 1998, 24).

Dennoch sind einige Schlussfolgerungen bezüglich des Zahlbegriffs und seiner Entwicklung möglich. So wird deutlich, dass sich gewisse Ähnlichkeiten zwischen der phylogenetischen und der ontogenetischen Entwicklung des Zahlbegriffs abzeichnen. Beispielsweise wurde beim Zählen in der früheren Geschichte die Eins-zu-Eins-Zuordnung ebenso wie der Gebrauch von Körperteilen, wie z.B. der Finger, gewählt, genauso, wie es heute noch bei der kindlichen Zahlbegriffsentwicklung zu beobachten ist. In diesem Zusammenhang ist es meines Erachtens interessant festzuhalten, dass der Mensch zunächst den Mengenaspekt einer Zahl betrachtet hat, den Aspekt der Reihenfolge aber anfänglich kaum erkannt und berücksichtigt zu haben scheint. Diese Frage nach den einzelnen Aspekten der Zahl soll im folgenden Kapitel noch einmal aufgegriffen werden. Anhand der langen Dauer der geschichtlichen Entwicklung kann verdeutlicht werden, wie komplex und abstrakt der Begriff der Zahl ist, und wie schwierig demzufolge die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind sein kann (vgl. Csocsán u.a. 2002, 15). Auf diese kindliche Entwicklung des Zahlbegriffs wird im Verlauf der Arbeit noch ausführlich eingegangen.

## 1.3 Die Zahl aus psychologischer Sichtweise

Wie bereits erwähnt, wird bei einer psychologischen Sichtweise der Zahl von einem Zahlbegriff gesprochen. Diese psychologische Sichtweise des Zahlbegriffs wird in diesem Kapitel angesprochen.

### Kontroverse um die Entwicklung des Zahlbegriffs

Ein Kind lernt im Laufe seiner Entwicklung, ähnlich wie die Menschheit im Laufe der Geschichte, immer mehr über Zahlen und deren Zusammenhänge kennen. Solche Kenntnisse in Bezug auf Zahlen werden zusammenfassend Zahlbegriff genannt. Allerdings ist auch heute noch unklar, welche Aspekte zu einem Zahlbegriff gehören. Eine wichtige Frage in dem Zusammenhang ist beispielsweise, ob „der Zahlbegriff erst gebildet [ist], wenn man nur die Zahlen eingeführt hat, oder (...) der Zahlbegriff erst gewonnen [ist], wenn auch die Beziehungen zwischen den Zahlen bekannt sind?“ (Lange 1984, 5). Diese Frage wird auch heute noch kontrovers diskutiert. Maier (1972, 34) spricht von Zahlbegriffen „sobald sich die Zahlen von konkreten Gegenständen lösen und als subjektive Vorstellungsinhalte Bestand in sich gewinnen [...]. Sie stellen eine Abstraktion dar, welche die Zusammenfassung verschiedener Sachverhalte unter einem gemeinsamen quantitativen Gesichtspunkt ermöglicht und erleichtert“ (Maier 1972, 34). Er geht also davon aus, dass von einem Zahlbegriff erst dann gesprochen werden kann, wenn grundlegende Beziehungen, also verschiedene Sachverhalte, erkannt werden. Allein die Kenntnis der Zahlenfolge stellt für ihn noch keinen Zahlbegriff dar. Freudenthal (1973, 259) spricht hingegen nicht von einem, sondern von mehreren

Zahlbegriffen, wie beispielsweise dem inhaltlichen, dem methodologischen oder dem genetischen Zahlbegriff.

Piaget und Szeminska (1969, 208) versuchten erstmalig, den psychologischen und den logisch-mathematischen Zugang zur Zahl zusammenzuführen:

> Eine Kardinalzahl ist eine Klasse, deren Elemente aufgefaßt werden als untereinander äquivalente und dennoch unterschiedene „Einheiten“, deren Differenzen also nur darin bestehen, daß man sie aufreihen, also anordnen kann. Umgekehrt sind die Ordinalzahlen eine Reihe, deren Glieder, obgleich sie aufeinander folgen nach den Ordnungs-Relationen, die ihnen ihre jeweiligen Rangstufen zuweisen, ebenfalls Einheiten sind, die einander äquivalent sind und infolgedessen kardinal zusammengefügt werden können. Die finiten Zahlen sind also zwangsläufig zugleich Kardinal- wie Ordinalzahlen.

Ein Beispiel soll diesen Zusammenhang verdeutlichen. Angenommen, es sollen sieben Früchte gezählt werden. Da es sich bei der Zahl sieben in diesem Fall um eine Anzahl handelt, wird diese Zahl Kardinalzahl genannt. Beim Zählen der Früchte muss aber darauf geachtet werden, dass keine Frucht doppelt gezählt oder eine vergessen wird. Jede Frucht muss genau einmal gezählt werden. Um dies zu ermöglichen, wird eine Frucht nach der anderen gezählt, es wird also eine Reihenfolge festgelegt, in der jede Frucht seine eigene Position hat, die sie von den anderen Früchten unterscheidet. Dieser Rangplatz ist eine Ordnungszahl. Die Ordnungszahl der letzten Frucht in der Reihe ist identisch mit der Anzahl der Früchte, der Kardinalzahl. „Weil das letzte Element das Siebte (Ordinalzahl) ist, sind es zusammen sieben (Kardinalzahl)“ (Hamel & Tombe 1972, 79). Jede Zahl ist also laut Piaget zugleich Kardinal- wie Ordinalzahl, da eine Kardinalzahl durch Zählen nicht ohne den Ordinalzahlaspekt bestimmt werden kann (vgl. Hamel & Tombe 1972, 78f).

Die verschiedenen Autoren nähern sich dem abstrakten Zahlbegriff aus unterschiedlichen Richtungen und Blickwinkeln. Dabei werden jeweils verschiedene Aspekte hervorgehoben oder ausgelassen. Eine allgemeingültige Definition wurde bis heute nicht formuliert (vgl. Lange 1984, 6).

Heutzutage versteht man unter einem Zahlbegriff im Allgemeinen einen komplexen Begriff, der verschiedene Aspekte beinhaltet (vgl. Lange 1984, 6). Diese werden auf unterschiedliche Weise eingeteilt, beinhalten aber alle im Prinzip dasselbe. Müller und Wittmann (1984, 172f) unterscheiden sechs verschiedene Aspekte der Zahl, welche in der folgenden Tabelle 1 kurz vorgestellt werden:

| Zahlaspekt | Beschreibung | zugehörige Frage | Beispiel |
|---|---|---|---|
| ***Ordinal-zahlaspekt*** | a) Zählzahlaspekt: Folge der natürlichen Zahlen | | Grundzahlen: eins, zwei, drei, ... |
| | b) Ordnungszahlaspekt: Rangplatz von Elementen | Der wievielte? | Ordnungszahlen: der erste, der zweite, der dritte... |
| ***Kardinal-zahlaspekt*** | Zahlen beschreiben die Mächtigkeit von Mengen; Anzahl der Elemente | Wie viele? | Grundzahlen; meist mit Benennung: sieben Früchte |
| ***Operator-aspekt*** | Zahlen beschreiben die Vielfachheit einer Handlung oder eines Vorganges | Wie oft? | Zahladverbien: einmal, zweimal, dreimal; noch zweimal schlafen... |
| ***Maßzahl-aspekt*** | Zahlen dienen als Maßzahlen für Größen | Wie lang? Wie groß? usw. | 5 Meter, 7 Stunden |
| ***Rechen-zahlaspekt*** | a) algebraischer Aspekt: Zahlen bilden bezüglich der Rechenoperationen eine algebraische Struktur mit gewissen Gesetzen | | Kommutativgesetz: a+b=b+a Assoziativgesetz: (a+b)+c=a+(b+c) usw. |
| | b) Algorithmischer Aspekt: Darstellung von Zahlen im Stellenwertsystem | | Rechnen mit Algorithmen |
| ***Codierungs-zahlaspekt*** | Zahlen als Bezeichnung für Objekte | | Telefonnummern, Postleitzahlen etc. |

Tabelle 1: Übersicht über die Zahlaspekte (in Anlehnung an Müller & Wittmann 1984, 172f und Csocsán 2001, 18f)

Diese unterschiedlichen Aspekte der Zahl bzw. die verschiedenen Kontexte, in denen Zahlen vorkommen, müssen in jedem Fall verstanden sein, um von einem Zahlbegriff sprechen zu können. Dennoch ist auch bis heute nicht endgültig geklärt, welcher Aspekt sich zuerst entwickelt und welcher für einen anderen Voraussetzung sein könnte. Müller und Wittmann (1984, 173) bemerken, dass die Zählzahl eine Art Grundlage für die anderen Aspekte zu sein scheint. Durch ein Abzählen wird ein Rangplatz (eine Ordnungszahl) bestimmt; durch Auszählen die Anzahl an Elementen (die Kardinalzahl); durch Abtragen einer Einheit eine Größe (Maßaspekt) und durch Weiterzählen eine Addition (algebraischer Aspekt). Doch auch diesbezüglich besteht, wie in fast allen Bereichen des Zahlbegriffs, keine einheitliche Meinung.

## Kontroverse um angeborene oder erlernte Fähigkeiten bezüglich der Zahl

Mit der Frage, ob Fähigkeiten bezüglich der Zahl angeboren sind oder erlernt werden müssen, beschäftigte sich u.a. Brian Butterworth (1999), der eine Vielzahl von Experimenten durchgeführt und zusammengetragen hat. Er geht davon aus, dass Menschen mit einem so genannten „Zahlenmodul" geboren werden. Aufgabe dieses Moduls ist es nach Butterworth (1999, 7), die Welt in Zahlen zu betrachten und zu kategorisieren. Er vergleicht diese Fähigkeit mit dem Sehen von Farben, was dem Menschen in der Regel angeboren ist und nicht erst gelernt werden muss. Dieses Zahlenmodul, „ein Gefühl für Zahlen", wie Csocsán u.a. (2002, 21) es ausdrücken, wird durch Werkzeuge ergänzt, welche die Menschheit im Laufe der Geschichte erfunden haben. Diese Werkzeuge sind nach Butterworth (1999, 7f) das Darstellen der Zahlen durch Körperteile (z.B. durch Finger), sprachliche Repräsentationen (also Zahlwörter wie eins, zwei, drei etc.), Ziffern (z.B. 1, 2...) und externe Mittel (z.B. Lernmaterialien). Solche Werkzeuge sind nicht angeboren, sondern erfunden, um das angeborene Zahlenmodul nutzen zu können. Butterworth (1999, 112ff) belegt diese theoretische Annahme mit einigen Versuchen, die u.a. zeigen, dass ein sechs bis acht Monate altes Kind Karten länger betrachtet, je mehr Gegenstände auf ihnen abgebildet sind. Somit zeigt er auf, dass Kinder mit der Fähigkeit geboren werden, die Veränderung von Anzahlen zu bemerken. Auch Ahlberg und Csocsán (1997, 2) unterstreichen, dass schon Säuglinge

Mengen von bis zu drei Objekten erkennen und differenzieren können, ohne in der Lage zu sein, diese zu zählen. Diese angeborene Fähigkeit, das so genannte „subitizing“, beinhaltet außerdem das Erkennen von Mustern. Damit sind Zahldarstellungen gemeint, die als Ganzes, d.h. als ein Muster, gesehen oder gehört werden können (vgl. Ahlberg & Csocsán 1997, 2).

Butterworth (1999, 112f) betrachtet weiterhin die Fähigkeit von Säuglingen, das Ergebnis von Addition und Subtraktion zu erwarten. Eine Studie von Karen Wynn (1992, 320ff) verweist darauf, dass sich schon kleine Kinder überrascht zeigen, wenn beispielsweise von zwei Puppen eine weggenommen wird und dennoch zwei übrig bleiben. Dies setzt ein grundlegendes Verständnis von „Wegnehmen“ voraus. Allerdings bleibt unklar, ob Kinder in diesem Alter diese Erwartungen generalisieren können, oder ob sich diese nur auf die aktuelle Situation beziehen (vgl. Butterworth 1999, 115). Butterworth vertritt also den Standpunkt, dass der Begriff der Zahl in seiner Grundlage angeboren ist, im Laufe des Lebens jedoch weiter entwickelt wird. Es wird aber nicht eindeutig geklärt, was genau zu dieser als „Zahlenmodul“ bezeichneten Fähigkeit gehört, was also tatsächlich angeboren und was erlernt ist.

## 1.4 Begriffsklärung für diese Arbeit

Die vorangegangenen Kapitel zusammenfassend kann der Schluss gezogen werden, dass Zahlen, selbst wenn nur die natürlichen Zahlen betrachtet werden, im Allgemeinen sehr einfach und bekannt zu sein scheinen, sie aber kaum jemand wirklich versteht (vgl. Wember 1998, 29). Fast jeder behauptet von sich, die natürlichen Zahlen zu kennen, aber bei etwas genauerer Betrachtung sind die Zusammenhänge und Beziehungen zwischen den Zahlen so komplex, dass ein vollständiges Verständnis, erst recht in Bezug auf alle weiterführenden Zahlbereiche, als nicht erzielbar erscheint.

Dennoch gibt es ein grundlegendes Verständnis der natürlichen Zahlen, welches in den ersten Lebensjahren entwickelt wird und auf dem die weitere mathematische Entwicklung aufbaut. In der vorliegenden Arbeit soll von einem Zahlbegriff gesprochen werden, wenn dieses grundlegende Verständnis vorliegt. Damit meine ich nicht das Aufsagen der Zahlwortreihe oder das auswendige Dahersagen von Additionsaufgaben. Vielmehr meine ich ein Verständnis in Bezug auf das Dezimalsystem und zwar sowohl in Bezug auf geschriebene Ziffern als auch auf Zahlworte. Zudem muss sich ein Kind innerhalb dieses Dezimalsystems operational, d.h. bei Aufgabenstellungen sinnvoll bewegen können. Diesbezüglich möchte ich mich Maier (1972, 34) anschließen, dem zufolge ein Zahlbegriff die Lösung von konkreten Gegenständen und eine Abstraktion beinhaltet (vgl. Kapitel 1.1). Auch das Verständnis der Peano-Axiome, das die Grundlage für das Verständnis des Dezimalsystems darstellt, ist Teil des Zahlbegriffs (vgl. Kapitel 1.3).

Um von einem Zahlbegriff sprechen zu können, müssen alle in Kapitel 1.3 erwähnten Zahlaspekte begriffen werden. Dies beinhaltet auch bestimmte grundlegende Rechenoperationen und Beziehungen wie die „Teile im Ganzen"-Relation oder die „Kleiner-Größer"-Beziehung.

Bezüglich der Diskussion um ein angeborenes oder erlerntes Grundverständnis von Zahlen kann im Zuge dieser Arbeit kaum eine Aussage getroffen werden. Dennoch möchte ich davon ausgehen, dass ein Grundverständnis für Zahlen bei der Geburt vorhanden ist, wie auch immer dieses aussehen mag. Die Ausweitung dieses Grundverständnisses auf einen Zahlbegriff ist dann jedoch in der Entwicklung des Kindes zu suchen (vgl. Kapitel 1.3.2)